

Chapitre 6 Approche graphique d'une fonction

Activité 1 • Notions de relation et de fonction

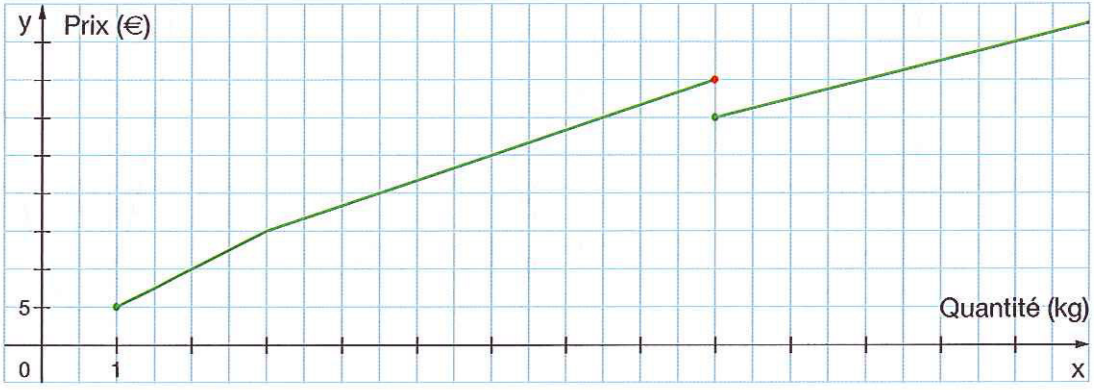
1 Le tableau ci-contre donne les relevés de connexions 4G pour lesquelles s'applique un même plan tarifaire.

Avec ce même plan tarifaire, Aline a visualisé un clip vidéo de 60 Mo durant 8 min 30 sec.

Durée (min)	Volume (Mo)	Prix HTVA (€)
2,5	16	2,40
6,5	45	6,75
11	75	11,25
8	64	9,60
6,5	50	7,50

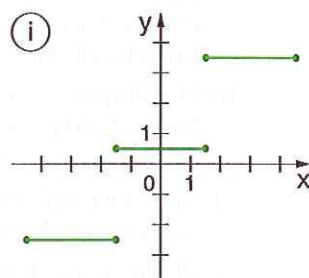
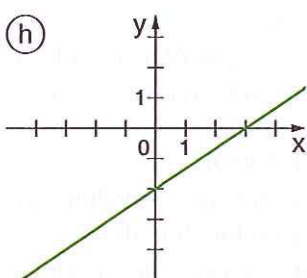
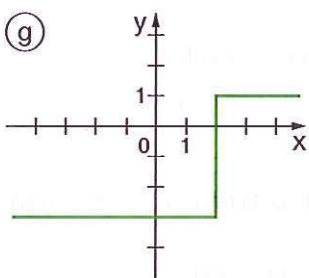
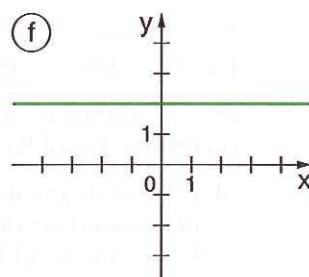
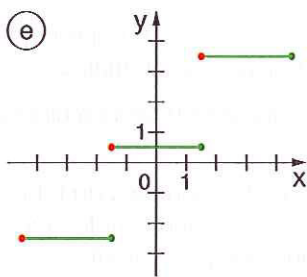
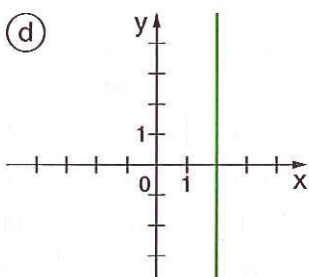
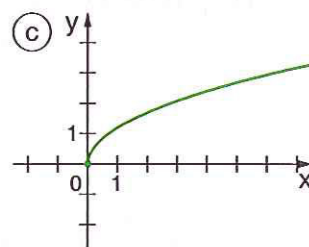
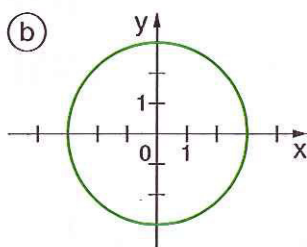
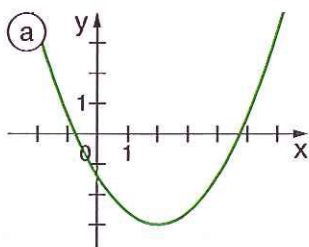
- a) À l'aide de points, représente les données du tableau ci-contre dans deux repères cartésiens sur lesquels les abscisses et les ordonnées représentent respectivement...
 - (1) la durée et le prix HTVA.
 - (2) le volume et le prix HTVA.Ensuite, déduis-en le prix payé par Aline pour la visualisation de son clip.
- b) On dit que le prix est fonction du volume. Si on appelle cette fonction f , on écrira $f(16) = 2,40$ pour spécifier qu'un transfert de 16 Mo coûte 2,40 €. Détermine $f(45)$, $f(50)$, $f(64)$ et $f(75)$.
- c) Si x et y représentent respectivement le volume en Mo et le prix HTVA en €, détermine une expression algébrique de y en fonction de x .
- d) Vérifie, par calcul, le prix à payer par Aline pour la visualisation de son clip.

61 2 Un grossiste en confiseries utilise un graphique représentant le prix de vente de guimauves en fonction de la quantité achetée, exprimée en kg. Voici ce graphique.

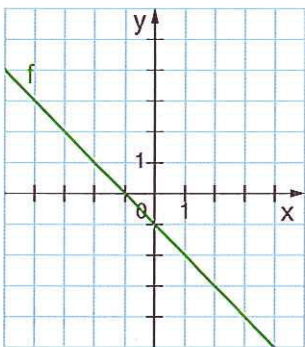


- a) Vérifie qu'il s'agit du graphique d'une fonction. Si f désigne cette fonction, exprime à l'aide d'une phrase la variable qui dépend de l'autre.
- b) Détermine $f(2)$; $f(3)$; $f(4,5)$; $f(9)$; $f(11)$; $f(12)$.
- c) Détermine le ou les réels a tels que $f(a) = 5$; $f(a) = 25$; $f(a) = 30$; $f(a) = 35$.

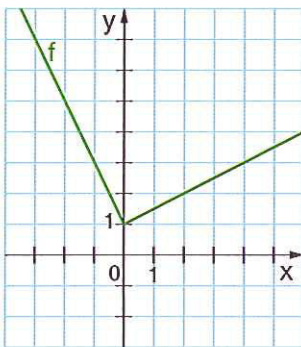
- 3 Tous les graphiques ci-dessous représentent des relations. Parmi ceux-ci, quels sont ceux qui représentent une fonction ?



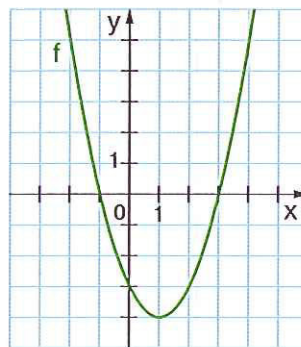
- 4 Quand cela est possible, complète les informations relatives à chaque graphique.



$$\begin{aligned} f(-3) &= \dots & f(\dots) &= -2 \\ f(0) &= \dots & f(\dots) &= 0 \\ f(3) &= \dots & f(\dots) &= 3 \end{aligned}$$

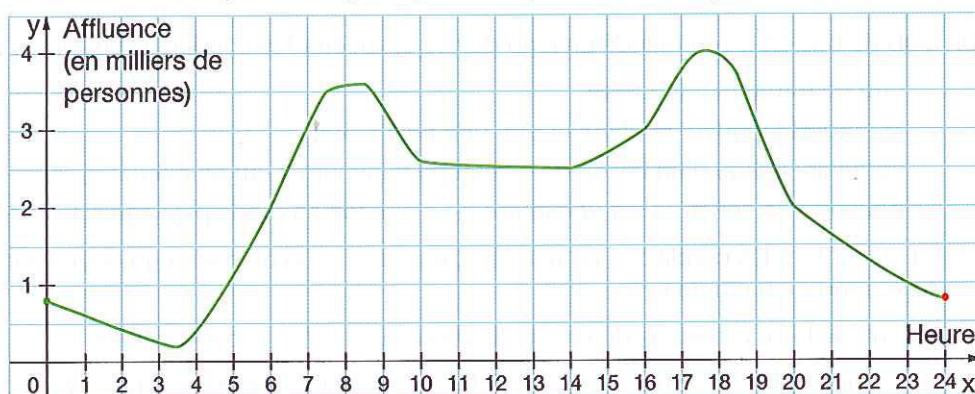


$$\begin{aligned} f(-2) &= \dots & f(\dots) &= 1 \\ f(1) &= \dots & f(\dots) &= 3 \\ f(2) &= \dots & f(\dots) &= -1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(-2) &= \dots & f(\dots) &= 0 \\ f(0) &= \dots & f(\dots) &= -4 \\ f(4) &= \dots & f(\dots) &= -5 \end{aligned}$$

- 5 Les portails électroniques situés à l'entrée des stations de métro permettent à la société de transport en commun de connaître la fréquentation de l'ensemble des stations à chaque instant. Le graphique ci-dessous, sur les axes duquel sont notés l'heure de la journée et l'affluence en milliers de personnes, indique la fréquentation de la journée du 5 avril 2015.



- a) Le graphique est-il celui d'une fonction ? Justifie.
- b) La variable qui dépend de l'autre est appelée variable dépendante, l'autre étant la variable indépendante.
- Quelles sont les variables indépendante et dépendante ?
- c) Si on appelle f la fonction représentée, détermine $f(16)$. Justifie.
- À l'aide d'une phrase, exprime ce que représentent $f(16)$ et sa valeur dans le contexte présenté.

- 6 Voici quelques situations. Pour chacune d'elles, complète la phrase « ... dépend ... » à l'aide des deux variables observées et déduis-en la variable indépendante.

	Situation	Variables observées	
a)	Après avoir effectué une course en taxi, on paie le taximan.	le montant à payer	le nombre de kilomètres parcourus
b)	Lors des soldes, un magasin affiche « Tout à 50 % ».	le prix avant soldes	le montant de la réduction
c)	Fred envoie, par la poste, un colis à son amie.	le montant de l'affranchissement	la masse du colis
d)	Une éolienne produit de l'énergie électrique.	la vitesse du vent	la quantité d'électricité produite
e)	Après de fortes pluies, la rivière est en crue.	le niveau de la rivière	la quantité de pluie tombée
f)	On observe la température extérieure lors d'une journée de printemps.	l'heure de la journée	la température relevée

Activité 2 • Domaine et ensemble image d'une fonction

1 Un club de basket a commandé un logo devant respecter les conditions suivantes :

- être de forme rectangulaire;
- le rapport longueur sur largeur doit être égal à $5/4$;
- contenir l'image d'un ballon de basket de minimum 4 cm de diamètre;
- pouvoir être construit sur une feuille A4 disposée en mode paysage (21 cm sur 29,7 cm).

a) En respectant les conditions demandées, représente un premier logo de 8 cm de large puis un second de 6 cm de large.

Détermine les dimensions du plus petit et du plus grand logo réalisables.

b) On nomme f_1 la fonction qui exprime la longueur du logo par rapport à sa largeur.

Construis un tableau de valeurs de la fonction f_1 contenant quelques largeurs possibles (x) et les longueurs correspondantes (y) en prenant soin d'y inclure les dimensions minimales et maximales du logo.

Si le **domaine** d'une fonction est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable indépendante x , donne le domaine de la fonction f_1 en notant cet ensemble $\text{dom } f_1$.

Si l'**ensemble image** d'une fonction est l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante y , donne l'ensemble image de la fonction f_1 en notant cet ensemble $\text{im } f_1$.

c) On nomme f_2 la fonction qui exprime l'aire du logo par rapport à sa largeur.

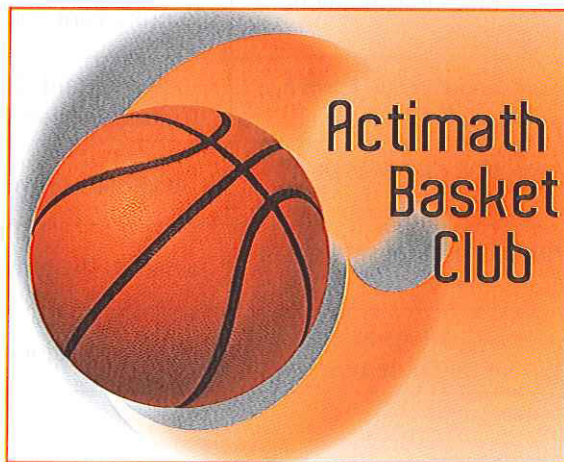
Construis un tableau de valeurs de la fonction f_2 contenant quelques largeurs possibles (x) et les aires correspondantes (y).

Détermine le domaine et l'ensemble image de la fonction f_2 .

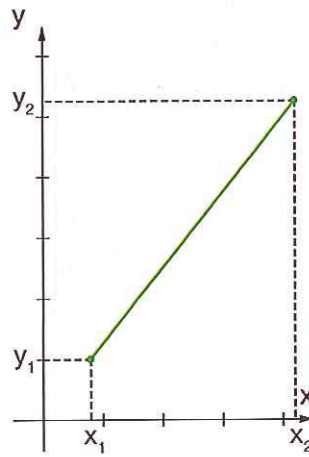
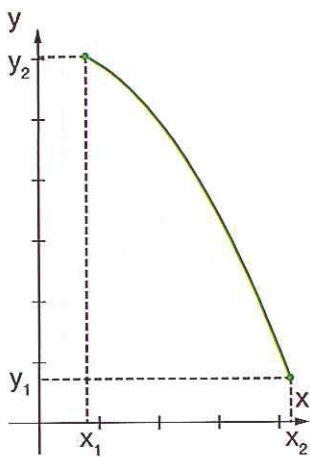
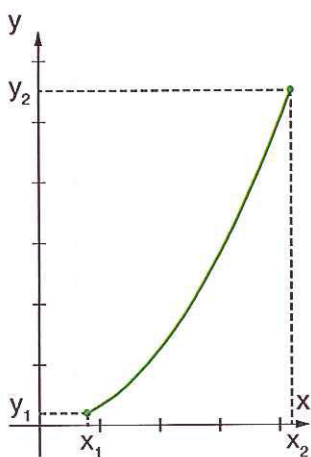
d) Lorsque le logo est dessiné sur une feuille de papier, la surface de la feuille située à l'extérieur du logo est perdue. On nomme f_3 la fonction qui exprime l'aire de la surface perdue d'une feuille A4 par rapport à la largeur du logo.

Construis un tableau de valeurs de la fonction f_3 contenant quelques largeurs possibles (x) et les aires des surfaces perdues correspondantes (y).

Détermine le domaine et l'ensemble image de la fonction f_3 .



- e) Associe chacune des fonctions f_1 , f_2 et f_3 à son graphique. Pour chaque graphique, précise les bornes du domaine (x_1 et x_2) et celles de l'ensemble image (y_1 et y_2).



- 2 On souhaite construire un rectangle de 24 cm^2 d'aire dont on connaît un côté de mesure x exprimé en centimètres.
- Si y représente la seconde dimension du rectangle en cm, établis un tableau de valeurs de la fonction f qui exprime celle-ci par rapport à la première.
 - Dans un repère cartésien, représente tous les couples solutions.
 - Détermine le domaine et l'ensemble image de la fonction f que tu viens de représenter.
 - Explique par une phrase comment déterminer la valeur de la seconde dimension (y) en fonction de celle connue (x).

Parmi les égalités ci-dessous, trouve celle qui exprime la dimension y en fonction de la dimension x .

$$y = 12 \cdot x$$

$$y = \frac{12}{x}$$

$$y = \frac{24}{x}$$

$$y = 24 \cdot x$$

$$y = \frac{\sqrt{24}}{x}$$

- 3 Voici le graphique d'une fonction f représentant le prix à payer en euros pour l'envoi d'une lettre non normalisée en fonction de sa masse exprimée en grammes. (Source : site bepost.be)

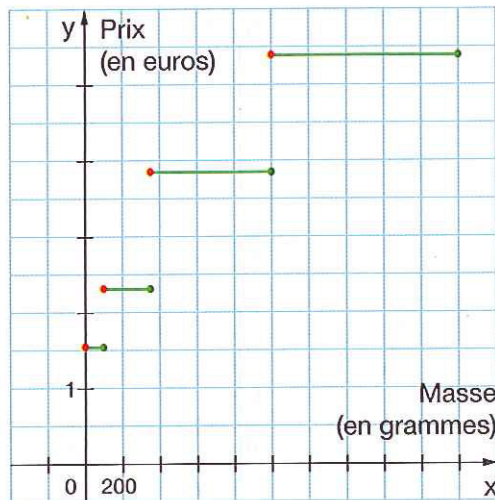
- a) Voici une série de valeurs :

1,31 € 1,54 € 1,88 € 2,31 € 2,78 € 3,40 €
3,85 € 4,23 € 4,85 € 5,39 € 5,95 € 6,31 €

Parmi celles-ci, détermine le prix à payer pour l'envoi d'une lettre de ...

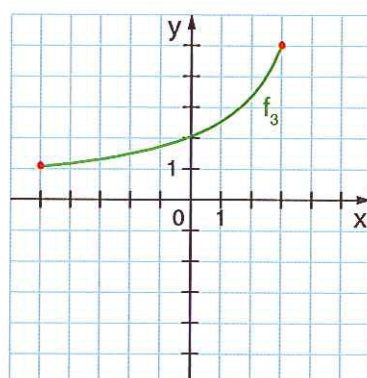
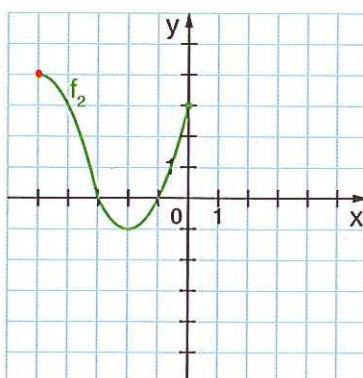
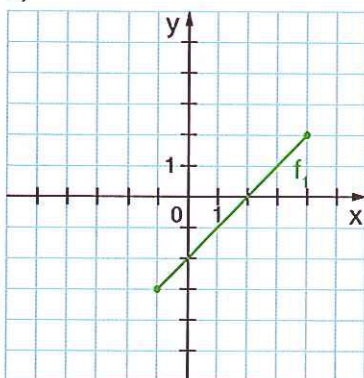
50 g 200 g 1000 g 1500 g 2000 g

- b) Justifie qu'il s'agit du graphique d'une fonction.
c) Détermine le domaine et l'ensemble image de cette fonction. Concrètement, que représentent-ils ?

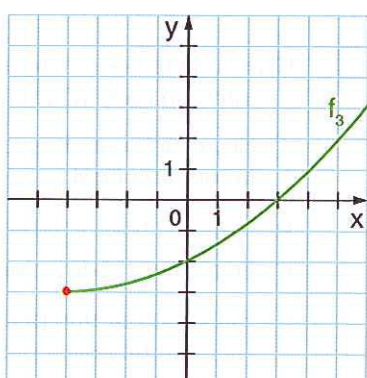
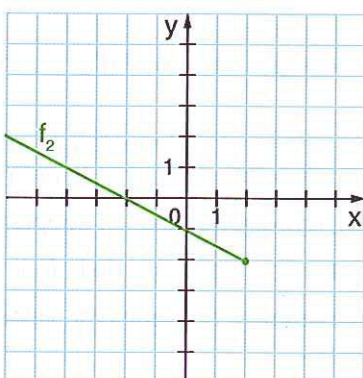
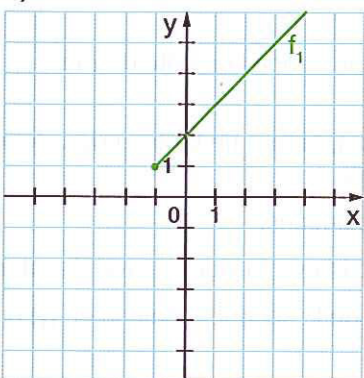


- 4 Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, détermine le domaine et l'ensemble image.

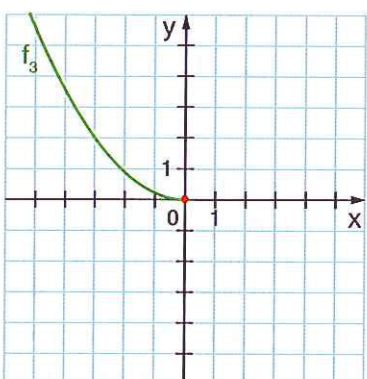
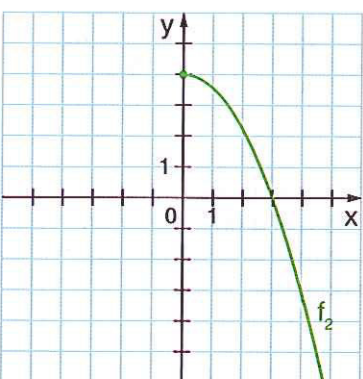
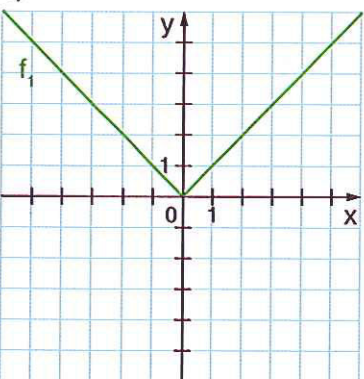
a)



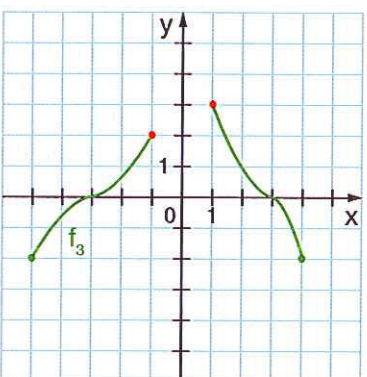
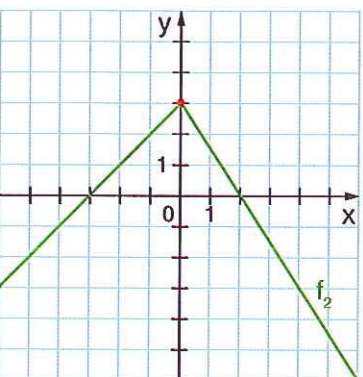
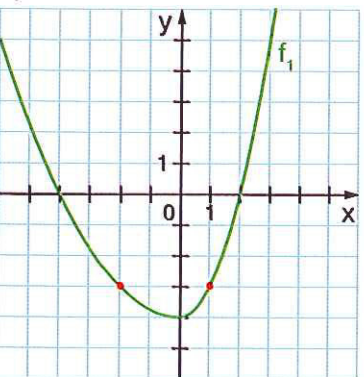
b)



c)



d)



Activité 3 • Intersection avec les axes

- 1 Pour son exercice de physique, Pascal doit transformer des degrés Celsius en degrés Fahrenheit. Il a trouvé dans son livre quelques exemples qu'il a reportés dans le tableau ci-dessous.

°C	-20	-23,3...	-10	0	10	-17,7...	-12,2...	20
°F	-4	-10	14	32	50	0	10	68

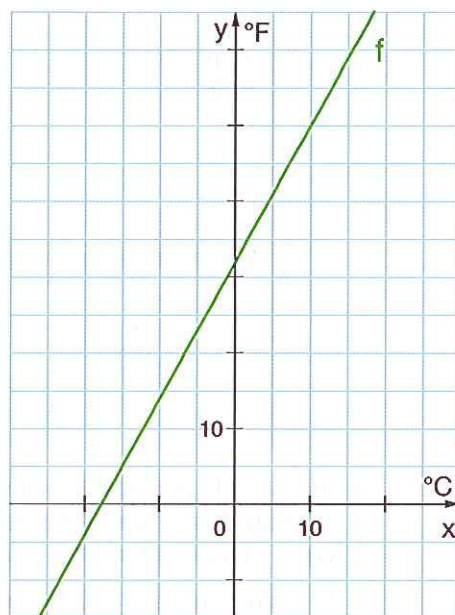
Sur internet, il a trouvé le graphique ci-contre de la fonction f , illustrant cette conversion.

- a) Détermine les coordonnées du point d'intersection du graphique avec l'axe y .
L'ordonnée de ce point est appelée **ordonnée à l'origine** de la fonction.

Quelle interprétation peux-tu donner aux coordonnées de ce point ?

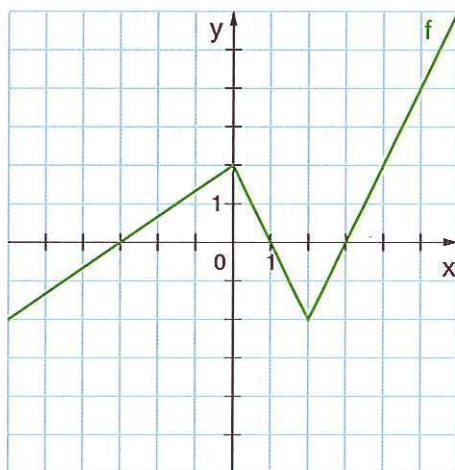
- b) Détermine les coordonnées du point d'intersection du graphique avec l'axe x .
L'abscisse de ce point est appelée **zéro** de la fonction.

Quelle interprétation peux-tu donner aux coordonnées de ce point ?



- 2 Voici le graphique d'une fonction f .

- a) Détermine les coordonnées du point d'intersection du graphique avec l'axe y .
Déduis-en l'ordonnée à l'origine de la fonction.
- b) Détermine les coordonnées des points d'intersection du graphique avec l'axe x .
Déduis-en les zéros de la fonction.

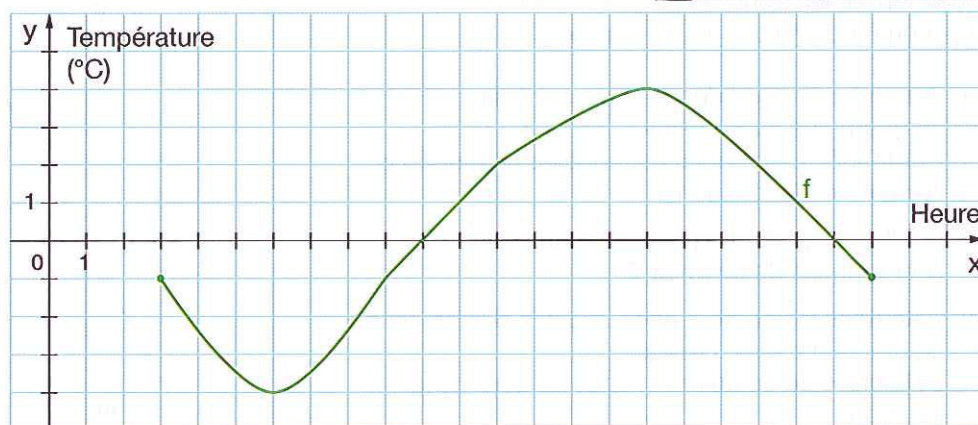


- 3 Après avoir identifié les points d'intersection avec les axes, détermine les zéros et l'ordonnée à l'origine des fonctions représentées à l'activité 2.4.

Tire ensuite une conclusion sur le nombre de zéros et d'ordonnées à l'origine d'une fonction.

Activité 4 • Zéros et signe d'une fonction

- 1 Voici le graphique de la fonction f représentant l'évolution de la température pour une partie de la journée du 15 janvier 2015 à Actimathville.



- Quelle est la période de la journée couverte par les observations ?
Entre quelles températures les observations ont-elles évolué ?
À quel(s) moment(s) de la journée la température était-elle nulle ?
De tes réponses précédentes, déduis le domaine, l'ensemble image et les zéros de la fonction f .
- Repassse en bleu les points du graphique pour lesquels la température est supérieure à 0° (strictement positive).
Repassse en noir les points du graphique pour lesquels la température est inférieure à 0° (strictement négative).
- Précise l'(les) intervalle(s) où la fonction est strictement positive.
Précise l'(les) intervalle(s) où la fonction est strictement négative.
- Complète le tableau de signes avec les informations manquantes :
 - sur les pointillés de la première ligne, indique les bornes du domaine et les zéros de la fonction classés par ordre croissant;
 - colorie en gris les colonnes du tableau qui ne font pas partie du domaine de la fonction;
 - sur la seconde ligne, indique sous les bornes du domaine leur image et, entre deux couples consécutifs de points, « + » lorsque la fonction est supérieure à 0 (strictement positive) et « - » lorsqu'elle est inférieure à 0 (strictement négative).

x	
y		0	...	0

65

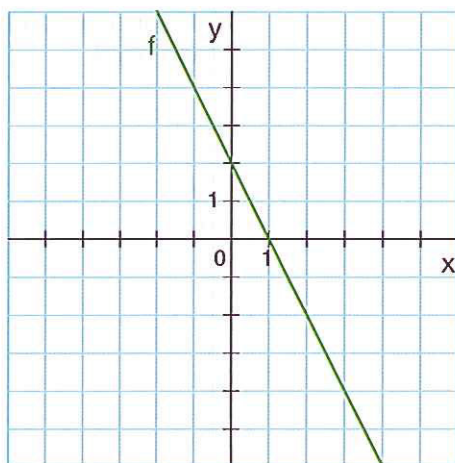
2 Voici le graphique d'une fonction f dont l'expression algébrique est $f : x \rightarrow y = -2x + 2$.

a) À partir de son graphique...

- détermine son domaine et son (ses) zéro(s);
- dresse son tableau de signes.

b) Écris sous forme d'intervalles les parties de \mathbb{R} où la fonction f est ...

- | | |
|--------------------------|--------------------|
| (1) négative | $(-2x + 2 \leq 0)$ |
| (2) positive | $(-2x + 2 \geq 0)$ |
| (3) strictement négative | $(-2x + 2 < 0)$ |
| (4) strictement positive | $(-2x + 2 > 0)$ |



66

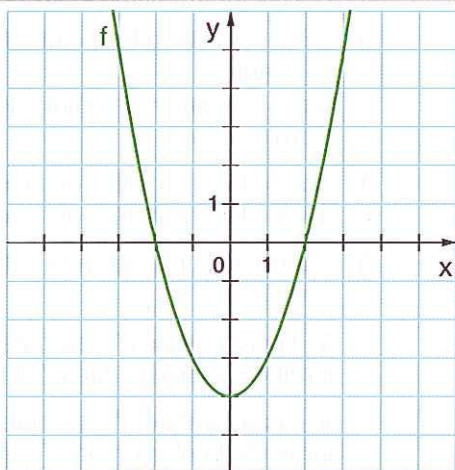
3 Voici le graphique d'une fonction f dont l'expression algébrique est $f : x \rightarrow y = x^2 - 4$.

a) À partir de son graphique ...

- détermine son domaine et son (ses) zéro(s);
- dresse son tableau de signes.

b) Écris sous forme d'intervalles les parties de \mathbb{R} où la fonction f est ...

- | | |
|--------------------------|--------------------|
| (1) négative | $(x^2 - 4 \leq 0)$ |
| (2) positive | $(x^2 - 4 \geq 0)$ |
| (3) strictement négative | $(x^2 - 4 < 0)$ |
| (4) strictement positive | $(x^2 - 4 > 0)$ |

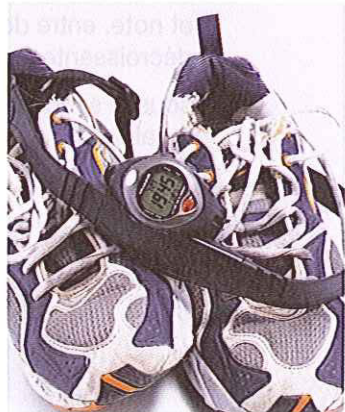


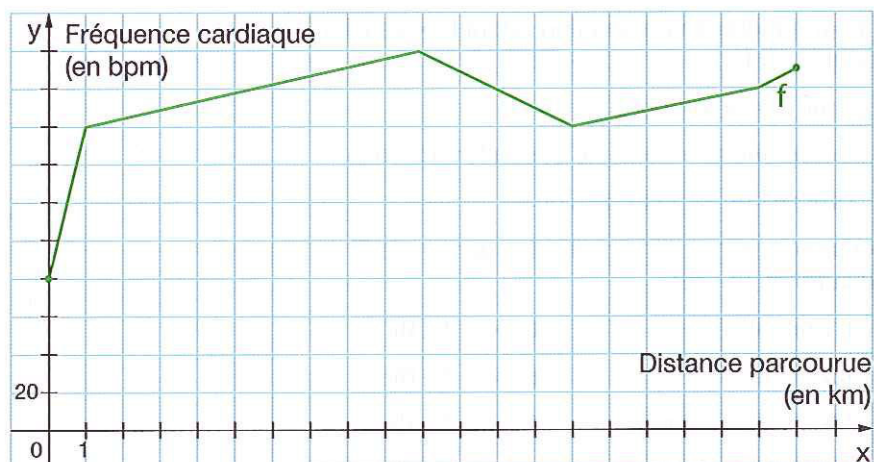
Activité 5 • Croissance et décroissance d'une fonction

67-68

1 Pour vérifier le niveau d'effort d'un athlète à un instant donné, on mesure sa fréquence cardiaque en battements par minute (bpm).

À partir de données enregistrées par un cardiomètre durant une compétition, on a construit le graphique de la fonction f représentant la fréquence cardiaque (y) d'un joggeur en fonction de la distance parcourue en kilomètres (x).





- a) Quelles informations peux-tu déduire de ce graphique ?
- b) Repasse en bleu les points du graphique pour lesquels la fréquence cardiaque est croissante.
Repasse en noir les points du graphique pour lesquels la fréquence cardiaque est décroissante.

- c) Précise les intervalles où la fonction est croissante.
Précise les intervalles où la fonction est décroissante.
- d) Détermine la plus grande et la plus petite fréquence cardiaque enregistrées par le cardiomètre.

Si le cardiomètre n'avait enregistré les fréquences qu'entre les 12^e et 17^e kilomètres, quelle aurait été la plus petite fréquence enregistrée ?

Si le cardiomètre n'avait enregistré les fréquences qu'entre les 17^e et 20^e kilomètres, quelle aurait été la plus grande fréquence enregistrée ?

- e) Tous ces renseignements peuvent être synthétisés dans un tableau de variations.

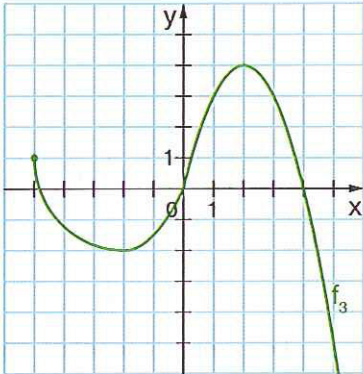
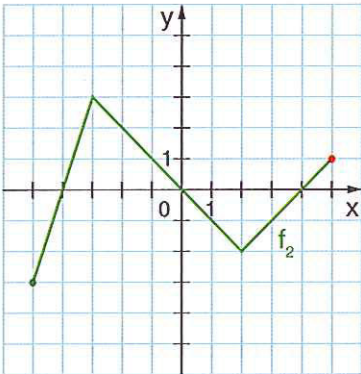
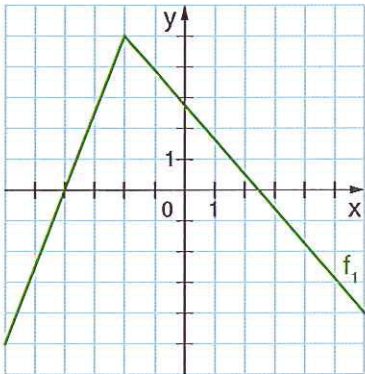
Complète le tableau avec les informations manquantes :

- sur les pointillés de la première ligne, indique, par ordre croissant, les bornes du domaine et les abscisses des points où la fonction cesse d'être croissante pour devenir décroissante ou inversement;
- colorie en gris les colonnes du tableau qui ne font pas partie du domaine de la fonction;
- sur la seconde ligne, indique, sous les valeurs de x présentes, les images de celles-ci et note, entre deux couples de points consécutifs, si la fonction est croissante (\nearrow) ou décroissante (\searrow).
- sous la seconde ligne, indique les maximums et minimums en précisant s'ils sont locaux ou absolus.

x		
y		

68

2 Dresse le tableau de variations de chacune des fonctions suivantes.



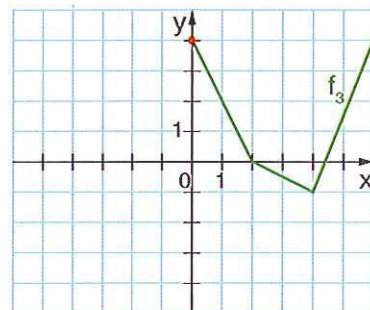
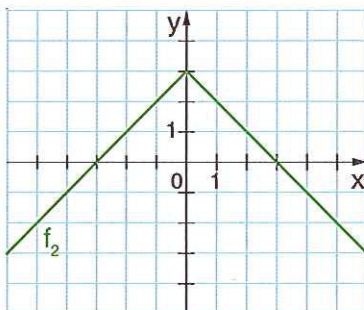
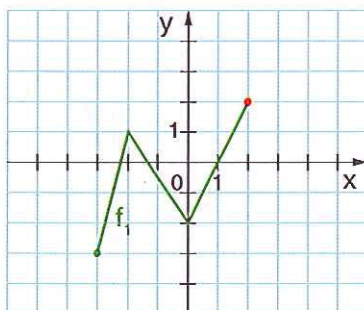
Activité 6 • Analyse graphique d’une fonction : exercices de synthèse

1 Voici le profil de l’étape Pau/Hautacam disputée lors du Tour de France cycliste 2014. On appelle f la fonction qui représente l’altitude (en m) du coureur en fonction de la distance parcourue (en km) depuis le départ.



- a) Détermine le domaine, l’ensemble image et le maximum absolu de la fonction f . Précise quelles sont les informations à propos de l’étape que tu peux tirer de tes réponses.
- b) Le départ de la course a été donné à 13 h 15 et Nibali, vainqueur de l’étape, l’a parcourue à la vitesse moyenne de 35,737 km/h. Calcule l’heure de son arrivée à Hautacam.
- c) Lors de la reconnaissance de cette étape, deux cyclotouristes, Alain et Benoît ont roulé ensemble jusqu’à Trébons. Ensuite, Alain a roulé à 24 km/h de moyenne jusqu’au sommet suivant tandis que Benoît n’a roulé qu’à 23,2 km/h de moyenne. Ils ont ensuite effectué la descente à la même vitesse. Lors de la dernière ascension, Alain a roulé à 20,4 km/h de moyenne tandis que Benoît a roulé à 21,2 km/h de moyenne. Détermine lequel des deux est arrivé le premier à Hautacam et quelle était son avance sur l’autre.

- 2 Voici les graphiques de trois fonctions f_1 , f_2 et f_3 .



Détermine la fonction répondant à chaque critère.

- La fonction est croissante sur $[0 ; 2[$.
- La fonction est décroissante sur $[2 ; 5]$.
- Le domaine de la fonction est \mathbb{R}_0^+ .
- L'image du réel -1 par la fonction est 2.
- La fonction est strictement positive sur $] -3 ; 3[$.
- La fonction possède deux zéros opposés.
- L'ordonnée à l'origine de la fonction est négative.
- La fonction admet un minimum absolu au point $(4 ; -1)$.
- La fonction admet un maximum local au point $(-2 ; 1)$.
- Le domaine de la fonction est identique à son ensemble image.

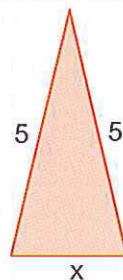
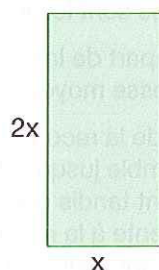
- 3 Dans chaque cas, trace le graphique d'une fonction f vérifiant les conditions spécifiées.

- $\text{dom } f = [-3 ; 2]$; 1 est l'unique zéro de f et f est toujours croissante;
- $\text{dom } f = [-2 ; 4]$; $\text{im } f = [-3 ; 3]$ et f est toujours décroissante;
- $\text{dom } f = \mathbb{R}_0^+$; 1 est zéro de f et f est toujours décroissante;
- $\text{dom } f = \mathbb{R}_0^+$ et $(1 ; -2)$ est un minimum absolu;
- $\text{dom } f = \mathbb{R}$; 2 est l'unique zéro de f ; f est strictement positive sur $\leftarrow, 2[$ et strictement négative sur $]2 ; \rightarrow$ et
- $\text{dom } f = \mathbb{R}$; -2 , 1 et 4 sont les zéros de f ; l'ordonnée à l'origine de f est 2 et f est toujours positive.

Activité 7 • Résolution graphique d'une équation du type $f(x) = g(x)$

- 1 Les fonctions f et g expriment les périmètres respectifs du rectangle et du triangle représentés ci-contre, en fonction de x .

- Pour chaque figure, détermine les valeurs que peut prendre x . Dédus-en le domaine des fonctions f et g .
- Construis un tableau de valeurs pour chaque fonction.
- Dans un même repère cartésien, représente le graphique de ces deux fonctions et détermine le point d'intersection de ces deux graphiques. Si nécessaire, fais apparaître les coordonnées de ce point dans les tableaux de valeurs construits précédemment.



- d) Détermine algébriquement la valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle et celui du triangle sont égaux. Que constates-tu ?
 e) Construis les deux figures pour la valeur de x trouvée et vérifie ta solution.

69

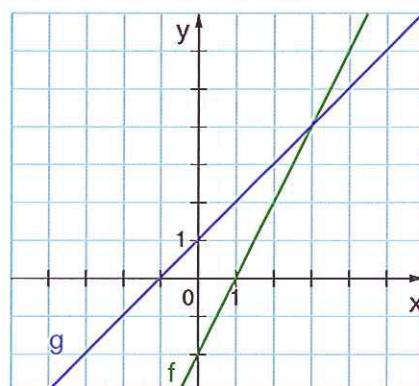
2 Voici les graphiques des fonctions

$$f : x \rightarrow y = 2x - 2 \text{ et } g : x \rightarrow y = x + 1.$$

a) Détermine graphiquement la solution de l'équation

$$2x - 2 = x + 1.$$

b) Vérifie algébriquement ta solution.



69

3 On a représenté ci-contre dans un même repère les graphiques de quatre fonctions :

$$f_1 : x \rightarrow y = -2x + 2$$

$$f_2 : x \rightarrow y = 2x + 2$$

$$f_3 : x \rightarrow y = 1$$

$$f_4 : x \rightarrow y = 5 - x^2$$

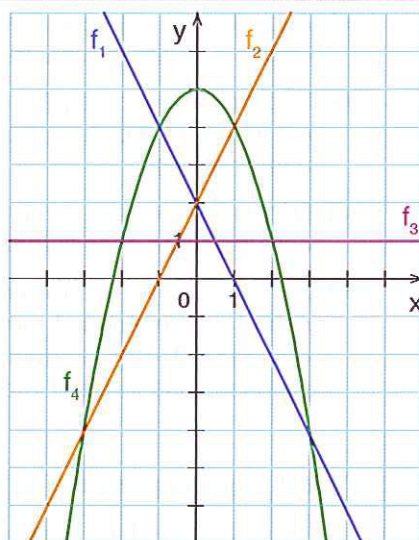
Utilise ces graphiques pour résoudre les équations suivantes :

a) $2x + 2 = -2x + 2$

b) $5 - x^2 = 1$

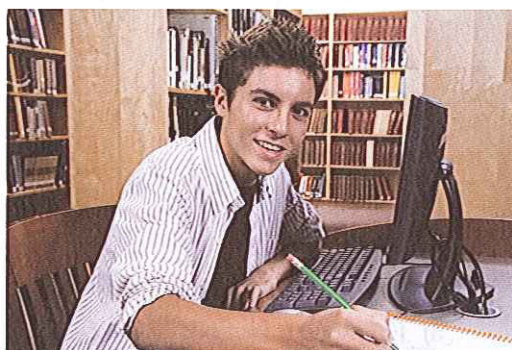
c) $2x + 2 = 5 - x^2$

d) $5 - x^2 = -2x + 2$



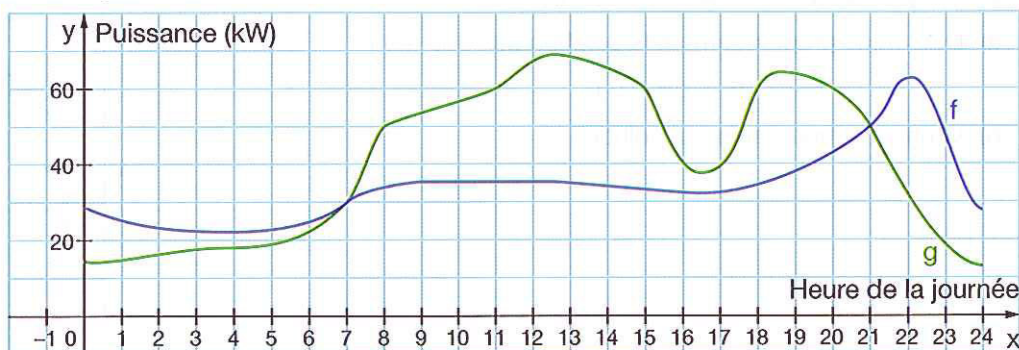
4 Lors d'un devoir, le professeur de Benoît lui a demandé de trouver les solutions de l'équation $x^2 - 2x - 1 = 2x - 4$.

- a) À l'aide d'un logiciel approprié, représente le graphique de deux fonctions qui te permettent de déduire la (les) solution(s) de cette équation et détermine ensuite celle(s)-ci.
 b) Benoît pense qu'il peut résoudre ce problème en utilisant le graphique d'une seule fonction. Explique son procédé.



Activité 8 • Comparaison de fonctions

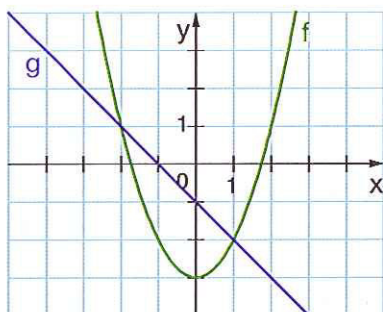
- 1 Les fonctions f et g représentées ci-dessous fournissent respectivement les puissances électriques mesurées le 1^{er} février 2015 chez les familles Fontaine et Gallez en fonction de l'heure de la journée.



- À quelles heures les puissances électriques mesurées dans les deux familles sont-elles égales ? Quelle puissance a été relevée à chacun de ces moments ?
- Détermine à quelles périodes de la journée la puissance mesurée chez la famille Fontaine est inférieure à celle mesurée chez la famille Gallez. Écris ta réponse sous forme d'intervalle(s).
- Détermine à quels moments la puissance mesurée chez la famille Fontaine est supérieure à celle mesurée chez la famille Gallez. Écris ta réponse sous forme d'intervalle(s).
- Afin de limiter sa consommation électrique, la famille Gallez a installé, près de son compteur, un témoin lumineux qui s'allume lorsque la puissance électrique atteint ou dépasse 60 kW. Détermine à quels moments de la journée ce témoin était allumé. Écris ta réponse sous forme d'intervalle(s).

- 2 Voici les graphiques des fonctions

$$f : x \rightarrow y = x^2 - 3 \text{ et } g : x \rightarrow y = -x - 1.$$

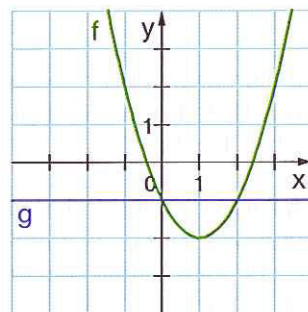


Détermine les parties de \mathbb{R} où ...

- $f(x) \leq g(x)$ ($x^2 - 3 \leq -x - 1$)
- $f(x) < g(x)$ ($x^2 - 3 < -x - 1$)
- $f(x) \geq g(x)$ ($x^2 - 3 \geq -x - 1$)

- 3 Voici les graphiques des fonctions

$$f : x \rightarrow y = x^2 - 2x - 1 \text{ et } g : x \rightarrow y = -1.$$



Détermine les parties de \mathbb{R} où ...

- $f(x) \leq g(x)$ ($x^2 - 2x - 1 \leq -1$)
- $f(x) > g(x)$ ($x^2 - 2x - 1 > -1$)

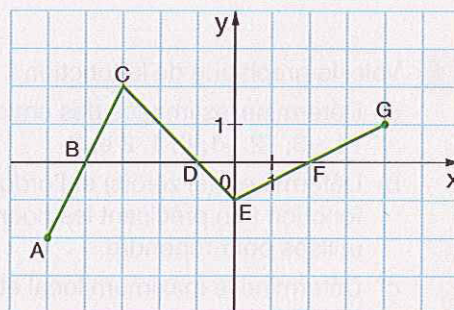
Connaître

- 1 Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Lorsque c'est faux, corrige la partie soulignée de la phrase.
- Une fonction est une relation qui, à chaque valeur de la variable x , fait correspondre au moins une valeur de y .
 - Le domaine d'une fonction est l'ensemble des entiers ayant une image par cette fonction.
 - L'ensemble image d'une fonction est l'ensemble des réels ayant une image par cette fonction.
 - L'ordonnée à l'origine d'une fonction f est l'ordonnée du point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe de la variable indépendante.
 - L'ordonnée à l'origine d'une fonction f est l'image de zéro par cette fonction.
 - Un zéro d'une fonction f est l'abscisse d'un point d'intersection du graphique de la fonction avec l'axe de la variable dépendante.
 - Un zéro d'une fonction f est une valeur de x qui annule y .
 - Une fonction f est strictement négative sur un intervalle de nombres réels si, pour tout nombre a de celui-ci, $f(a) > 0$.
 - Une fonction est décroissante sur un intervalle si, lorsque x augmente dans cet intervalle, alors $f(x)$ diminue.
 - Une fonction f admet, sur son domaine, un minimum local au point P si l'ordonnée de ce point est supérieure à celles des points du graphique de f situés dans son voisinage.
 - L'abscisse du point d'intersection des graphiques de $f(x)$ et $g(x)$ est solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

2 Voici le graphique de la fonction f .

- a) Choisis la (les) bonne(s) réponse(s) parmi les intervalles proposés.

dom f	•	•	$[-5 ; -3]$
im f	•	•	$[-5 ; 4]$
f est croissante	•	•	$[-4 ; -1]$
f est positive	•	•	$[-2 ; 2]$
		•	$[0 ; 4]$
		•	$[2 ; 4]$



- b) Complète les phrases à l'aide d'une lettre représentant un point du graphique.

La fonction f admet un maximum absolu au point

La fonction f admet un minimum absolu au point

La fonction f admet un maximum local qui n'est pas absolu au point

La fonction f admet un minimum local qui n'est pas absolu au point

L'abscisse du point est le zéro positif de la fonction f .

L'abscisse du point est un zéro négatif de la fonction f .

L'ordonnée du point est l'ordonnée à l'origine de la fonction f .

3 On a représenté ci-contre les fonctions f et g .

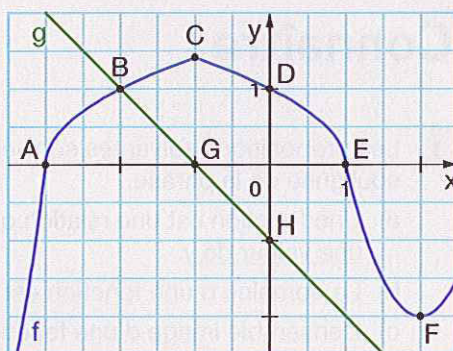
a) Quel(s) point(s) du graphique te permet(tent) de résoudre l'équation ...

(1) $f(x) = 0$

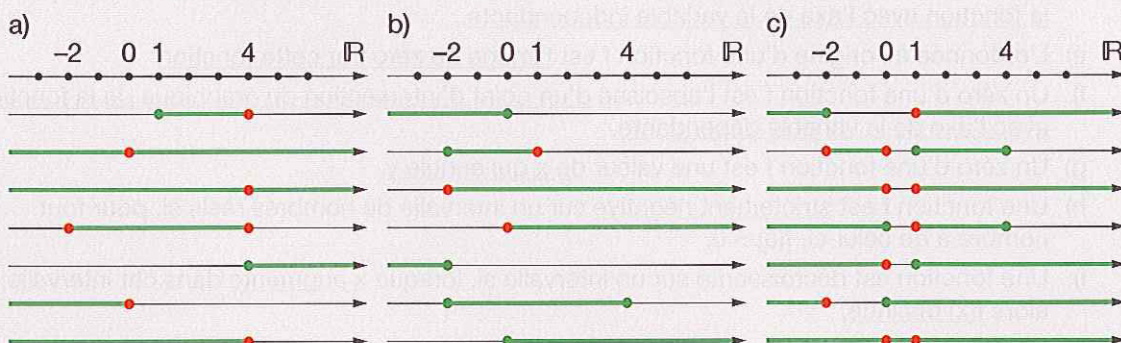
(2) $f(x) = g(x)$

(3) $g(x) = 0$

b) Déduis de tes réponses précédentes la ou les solutions de chacune des équations proposées.



4 Donne la notation de chacun des intervalles de la droite graduée.



Appliquer

1 Voici le graphique de la fonction f .

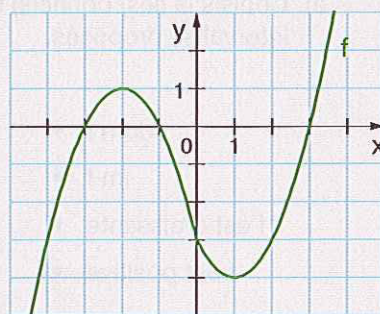
a) Détermine les images des entiers

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$ et 3 .

b) Détermine le(s) zéro(s) et l'ordonnée à l'origine de la fonction f en précisant les coordonnées des points utilisés pour répondre.

c) Détermine le maximum local et le minimum local de la fonction f .

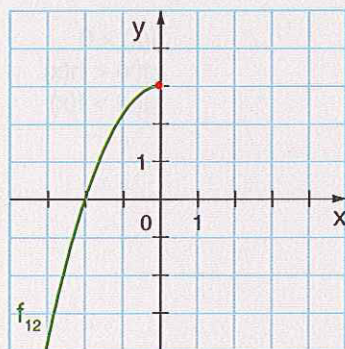
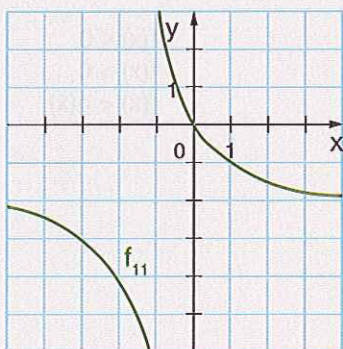
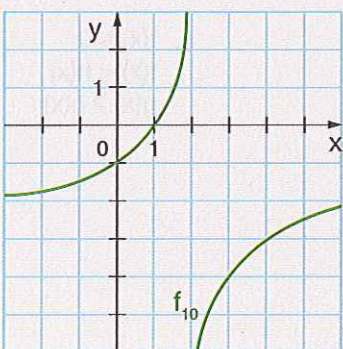
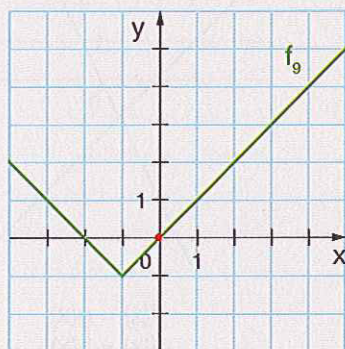
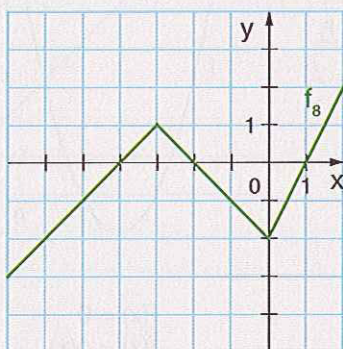
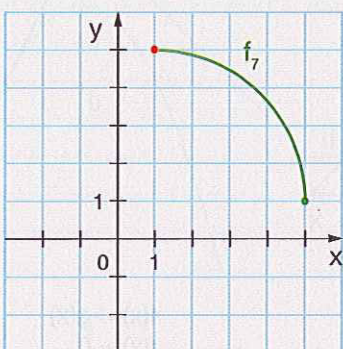
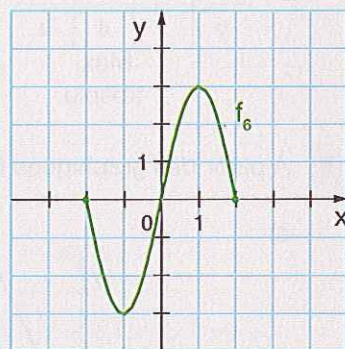
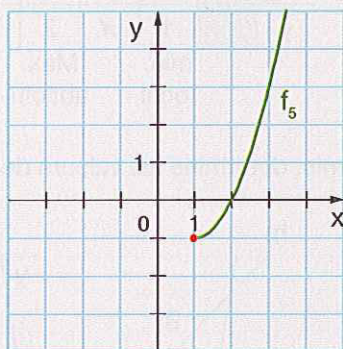
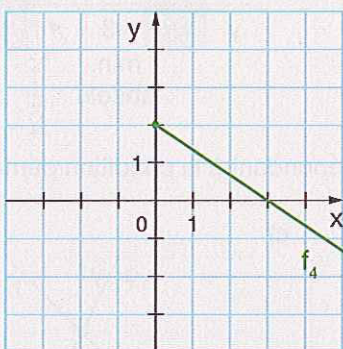
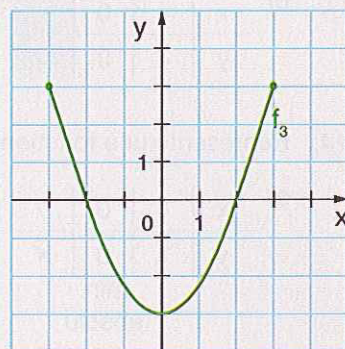
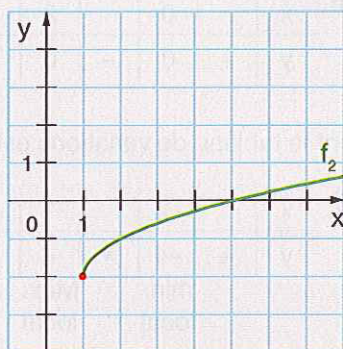
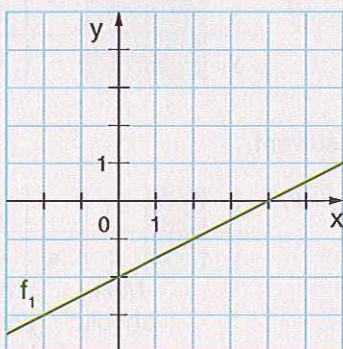
d) Indique des croix lorsque la fonction présente la caractéristique proposée.



Sur l'intervalle...	la fonction est...			
	strictement positive	strictement négative	croissante	décroissante
$]3 ; \rightarrow$				
$]2 ; 4[$				
$] -2 ; 1[$				
$\leftarrow ; -2[$				
$]1 ; 3[$				
$] -3 ; -1[$				

2 Pour chacune des fonctions représentées ci-dessous, ...

- détermine le domaine et l'ensemble image.
- détermine l'ordonnée à l'origine et le(s) zéro(s).
- dresse le tableau de signes.
- dresse le tableau de variations.



3 Représente une fonction dont le tableau de signes est le suivant.

a)

x		-2	
y	-	0	+

c)

x		-2		1	
y	-	0	+	0	-

e)

x		-2		2	
y		0	+	0	

b)

x		0	
y	+	0	

d)

x		0		2	
y	+	0	-	0	-

f)

x		0		3	
y			-	0	+

4 Représente une fonction dont le tableau de variations est le suivant.

a)

x		0	
y	↘	0	↗
		min. absolu	

c)

x		-2		1	
y	↘	-4	↗	-1	↘
		min. local		Max. local	

e)

x		-1		3	
y		2	↘	1	
		Max. absolu		min. absolu	

b)

x		1	
y	↗	4	↘
		Max. absolu	

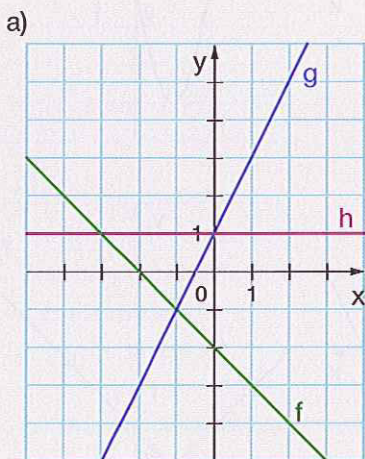
d)

x		0		3	
y		1	↗	2	↘
		min. local		Max. absolu	

f)

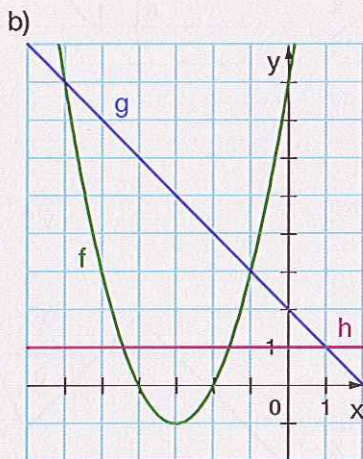
x		-2		2	
y		-3	↗		
		min. absolu			

5 À partir des graphiques fournis, détermine les valeurs de x répondant à la condition demandée.



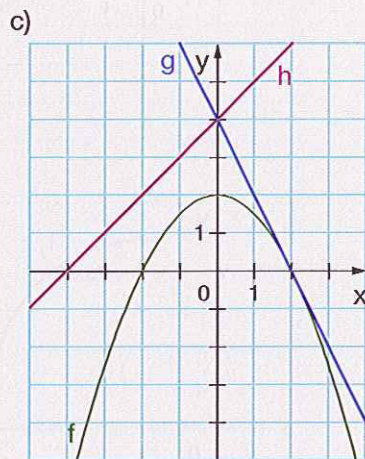
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f(x) &= h(x) \\ g(x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0 \\ g(x) &< h(x) \\ g(x) &> f(x) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ f(x) &= g(x) \\ g(x) &= h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ f(x) &> 0 \\ f(x) &< g(x) \end{aligned}$$



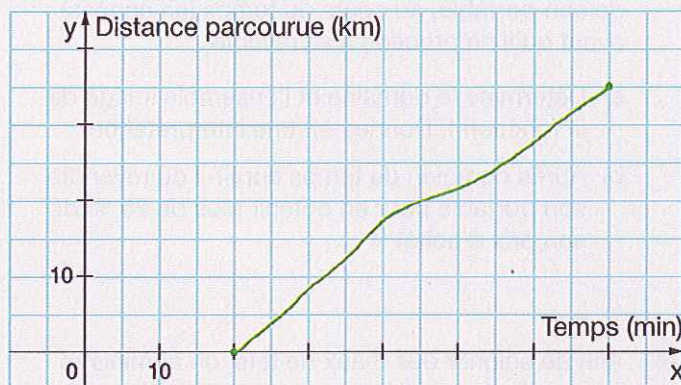
$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f(x) &= 0 \\ f(x) &= h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &\leq 0 \\ f(x) &< h(x) \\ g(x) &\geq h(x) \end{aligned}$$

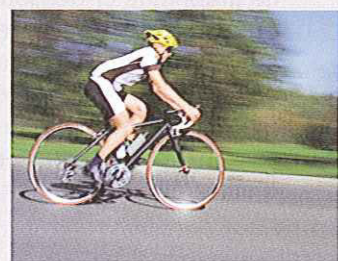
Transférer

- 1 La dernière étape d'une course cycliste est un contre la montre individuel au cours duquel les coureurs partent de trois en trois minutes dans l'ordre inverse du classement général.

Avant cette dernière étape, Philippe Gilbert était deuxième au classement général à deux minutes du leader. Le graphique ci-contre de la fonction f représente la distance parcourue en kilomètres par Gilbert en fonction du nombre de minutes écoulées depuis 15 h.

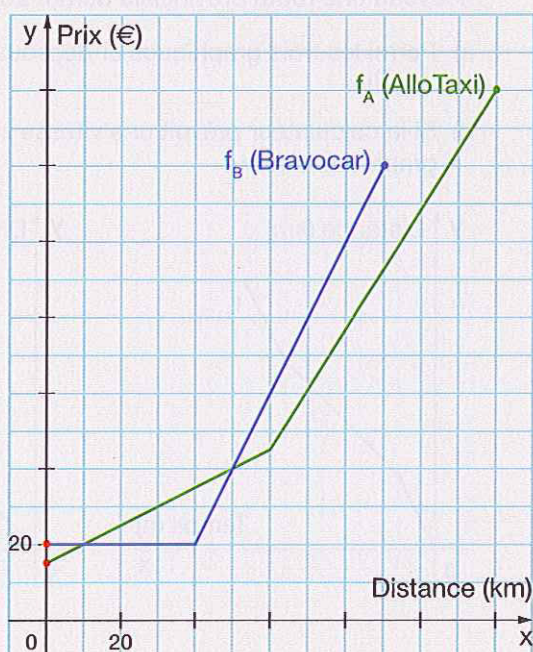


- Détermine le domaine de cette fonction et déduis-en...
 - les heures de départ et d'arrivée de Gilbert;
 - le temps mis par Gilbert pour parcourir cette étape;
 - l'heure de départ du leader du classement général.
- Détermine l'ensemble image de cette fonction. Quelle caractéristique de l'étape peux-tu en déduire ?
- Calcule la vitesse moyenne de Gilbert pour ce contre la montre.
- Si le leader a roulé durant cette étape à 40,4 km/h, penses-tu que Gilbert ait pu remporter le classement final de la course ? Justifie ta réponse à l'aide d'un calcul.

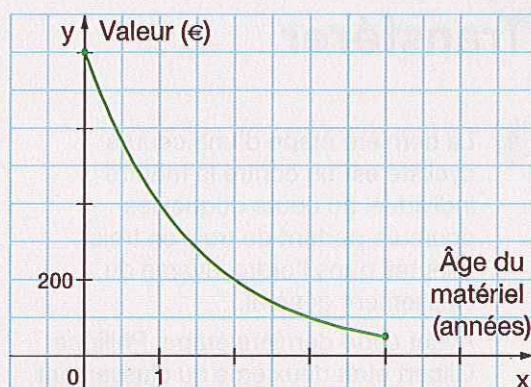


- 2 Le graphique ci-dessous montre les prix demandés par les sociétés de taxis AlloTaxi et Bravocar. On appelle f_A et f_B les fonctions représentées.

- Détermine le domaine de chacune de ces fonctions. Quelles conclusions peux-tu en tirer sur les distances des trajets avec chacune des sociétés ?
- La fonction f_B est constante sur $]0 ; 40]$; comment peux-tu interpréter cette tarification ?
- Pour quelles distances la société AlloTaxi est-elle plus avantageuse ? Écris ta réponse sous forme d'intervalles.
- L'année dernière, Pierre a effectué quatre allers-retours entre son domicile et l'aéroport avec la société Bravocar. Il a payé au total 640 €. Détermine la distance entre son domicile et l'aéroport et le montant qu'il aurait pu épargner en choisissant la société AlloTaxi.

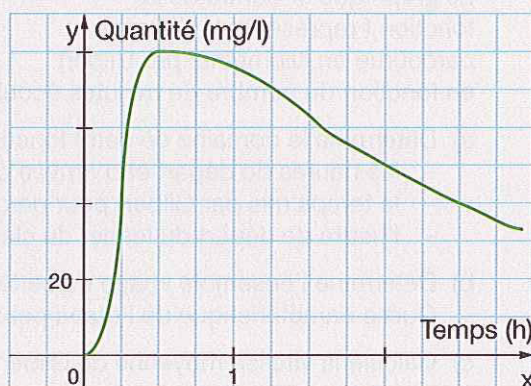


- 3 Le matériel informatique se déprécie rapidement au cours du temps. Pascal a tracé le graphique de la fonction f représentant la valeur (en €) de son portable, au cours du temps (en années) avant qu'il ne procède à sa revente.



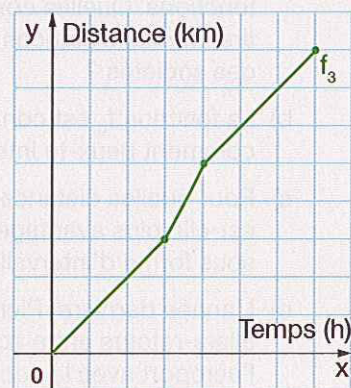
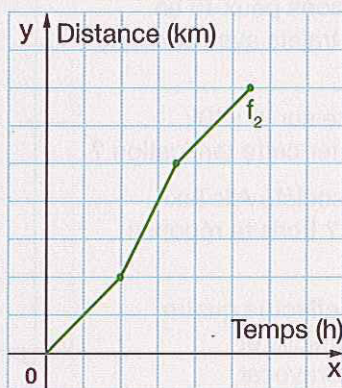
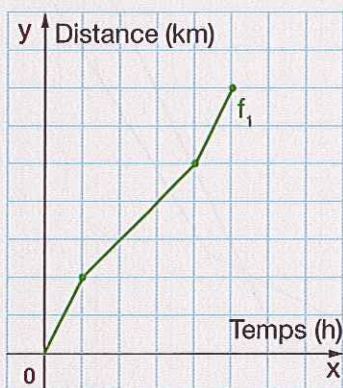
- a) Détermine le domaine et l'ensemble image de la fonction f . Donnes-en une interprétation.
b) Après combien de temps aurait-il dû revendre son portable pour en obtenir plus de 25 % de son prix d'achat ?

- 4 Afin de soigner des maux de tête, on administre à un patient un médicament par voie orale. Le graphique ci-dessous représente la quantité du principe actif dans le sang. La fonction possède un maximum dont l'ordonnée est appelée C_{\max} . On estime que le médicament produit un effet lorsque sa concentration est supérieure à $C_{\max}/2$. Détermine la durée d'efficacité de ce médicament.



- 5 Pour rendre visite à ses parents, un calculateur d'itinéraire propose à Margaux d'emprunter d'abord une route provinciale durant 20 km, ensuite une autoroute durant 30 km et enfin de nouveau une route provinciale durant 20 km.

- a) Parmi les trois graphiques ci-dessous, détermine celui qui a été élaboré par le calculateur. Justifie.
b) Si le calculateur prévoit une vitesse sur autoroute de 120 km/h, gradue les axes du repère du graphique choisi.



Chapitre 6 • Approche graphique d'une fonction

A Notion de fonction

1. Introduction

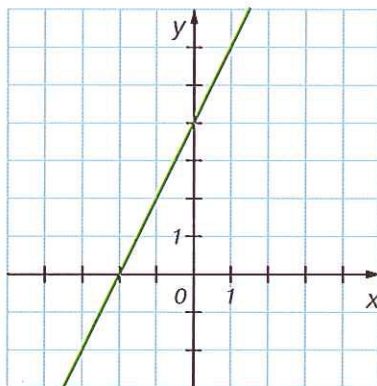
Une **relation** entre deux variables x et y peut être décrite par :

- un **tableau** qui associe les valeurs de x et de y ,
- un **graphique** qui représente l'ensemble des points de coordonnées $(x ; y)$,
- une **égalité mathématique**, appelée l'**équation** du graphique, qui exprime le lien existant entre les deux variables.

Exemples

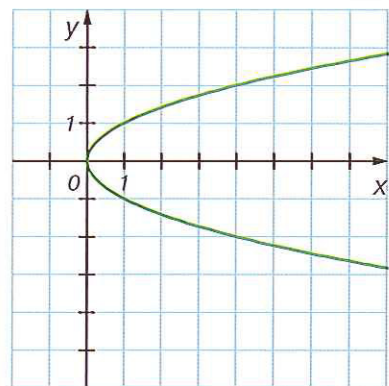
$$y = 2x + 4$$

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-2	0	2	4	6	8



$$y^2 = x$$

x	0	1	4	9
y	0	1, -1	2, -2	3, -3



2. Définition

Une **fonction** est une relation qui à **chaque** valeur de la variable x , fait correspondre au plus une (0 ou 1) valeur de y .

x et y sont respectivement appelées **variable indépendante** et **variable dépendante**.

3. Notations

Pour exprimer que y est une fonction de x , on écrit $y = f(x)$ ou $f : x \rightarrow y = f(x)$.

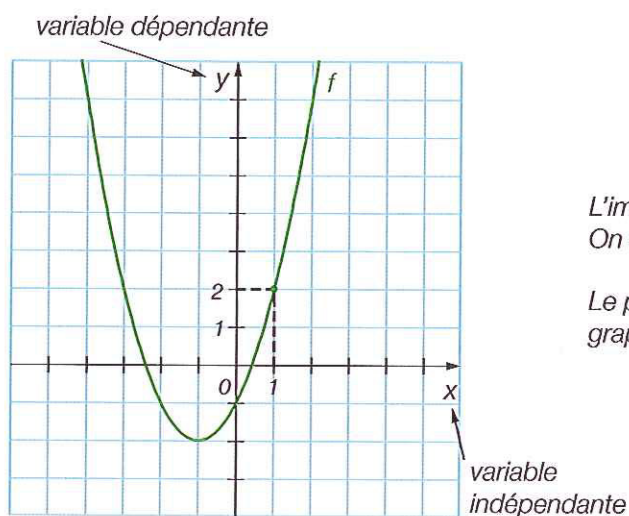
L'**image** d'un réel a par une fonction f est notée $f(a)$.

Conséquence

Le point $(a ; f(a))$ appartient au graphique de la fonction.

Exemple

Graphique de la fonction $f(x) = x^2 + 2x - 1$



L'image de 1 par la fonction f est 2.
On écrit $f(1) = 2$.

Le point $(1 ; 2)$ appartient au graphique de la fonction.

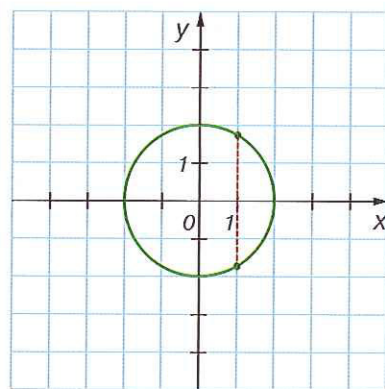
Tableau de valeurs

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	2	-1	-2	-1	2	7	14

Contre-exemple

Le graphique ci-contre représente une relation entre x et y ; ce n'est cependant pas une fonction, car à chaque valeur de x comprise entre -2 et 2 correspondent deux valeurs de y opposées.


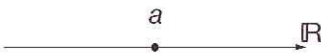








$$x^2 + y^2 = 4$$



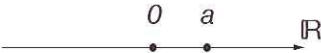






x	-2	-1		0		1		2
y	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	-2	2	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0

B Parties de \mathbb{R}

L'ensemble des réels \mathbb{R} est souvent représenté sur une droite graduée. En utilisant ce procédé, il est facile de noter des parties de cet ensemble.

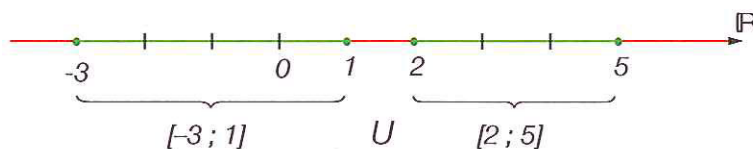
Notation	Représentation	Notation	Représentation
			
$]a ; b[$		$\leftarrow ; a[$	
$[a ; b]$		$]a ; \rightarrow$	
$]a ; b]$		$\leftarrow ; a]$	
$[a ; b[$		$[a ; \rightarrow$	

Certaines parties de \mathbb{R} possèdent une notation particulière.

	Notation	Représentation
		
Ensemble des réels différents de a	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	
Ensemble des réels non nuls	\mathbb{R}_0	
Ensemble des réels positifs	\mathbb{R}^+	
Ensemble des réels négatifs	\mathbb{R}^-	
Ensemble des réels strictement positifs	\mathbb{R}_0^+	
Ensemble des réels strictement négatifs	\mathbb{R}_0^-	

Lorsqu'un ensemble est constitué de deux sous-ensembles, on utilise le symbole \cup (union) pour indiquer l'ensemble des éléments appartenant à ces deux sous-ensembles.

Exemple

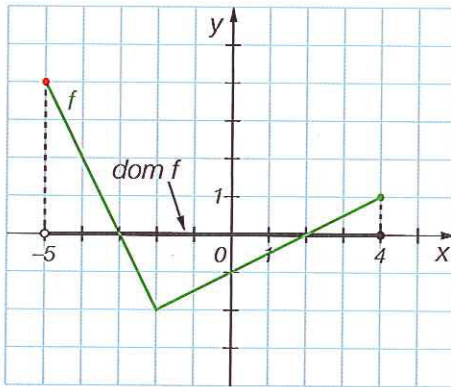


c Domaine et ensemble image

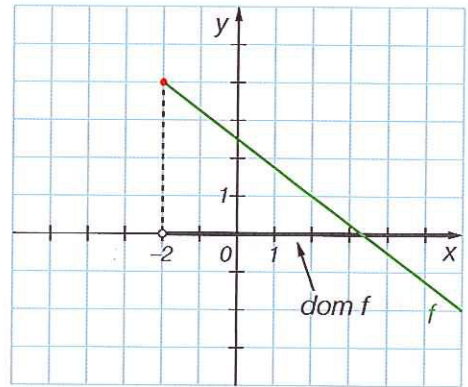
1. Domaine d'une fonction

Le **domaine** d'une fonction est l'**ensemble** des **réels** ayant une **image** par cette fonction.

Exemples



$$\text{dom } f =]-5 ; 4]$$

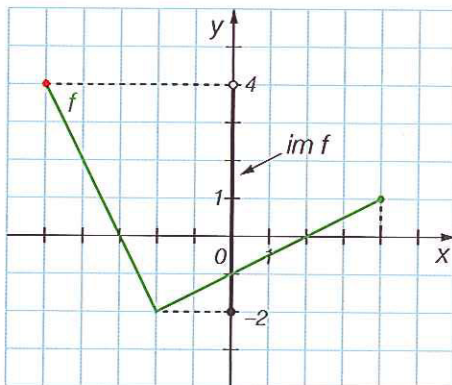


$$\text{dom } f =]-2 ; \rightarrow$$

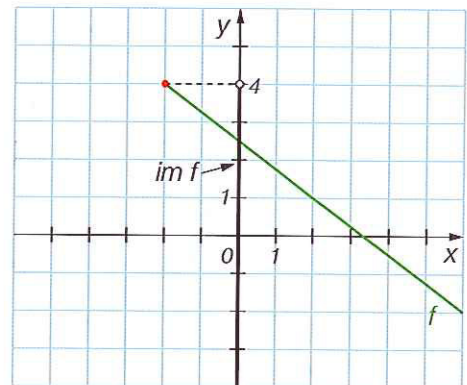
2. Ensemble image d'une fonction

L'**ensemble image** d'une fonction est l'**ensemble** des **réels** images par cette fonction.

Exemples



$$\text{im } f = [-2 ; 4[$$



$$\text{im } f = \leftarrow ; 4[$$

D Ordonnée à l'origine et zéro d'une fonction

1. Ordonnée à l'origine d'une fonction

Définition

L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction est l'**ordonnée** du point d'**intersection** du graphique de cette fonction avec l'**axe vertical**.

Conséquence

L'**ordonnée à l'origine** d'une fonction est l'**image** de **zéro** par cette fonction.

2. Zéro d'une fonction

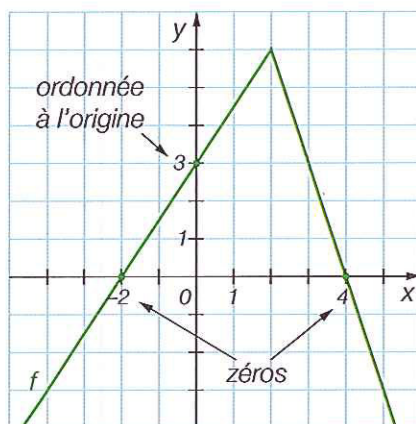
Définition

Un **zéro** d'une fonction est l'**abscisse** d'un point d'**intersection** du graphique de cette fonction avec l'**axe horizontal**.

Conséquence

Un **zéro** d'une fonction est une **valeur** de x qui **annule** y .

Exemple



Le graphique de la fonction f coupe l'axe y au point $(0 ; 3)$.

L'ordonnée à l'origine de la fonction f est 3.

$$f(0) = 3$$

Le graphique de la fonction f coupe l'axe x aux points $(-2 ; 0)$ et $(4 ; 0)$.

Les zéros de la fonction f sont -2 et 4 .

$$f(-2) = 0 \quad f(4) = 0$$

Remarque : Une fonction possède au plus une ordonnée à l'origine mais peut posséder plusieurs zéros.

E Signe d'une fonction

1. Signe d'une fonction sur un intervalle

Sur un **intervalle** de nombres réels, si pour tout nombre a de celui-ci...

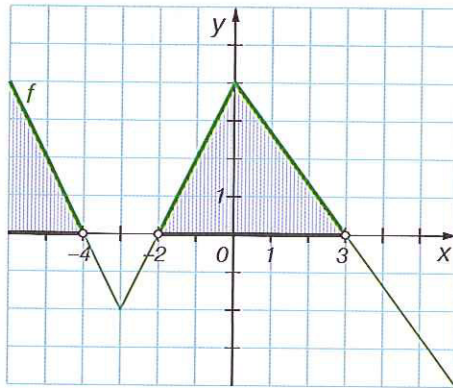
$f(a) > 0$, alors la fonction f est **strictement positive**,

$f(a) < 0$, alors la fonction f est **strictement négative**,

$f(a) \geq 0$, alors la fonction f est **positive**,

$f(a) \leq 0$, alors la fonction f est **négative**.

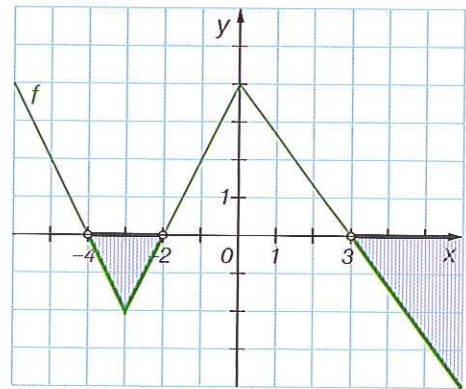
Exemples



La fonction f est strictement positive
sur les intervalles $\leftarrow ; -4]$ et $[-2 ; 3]$

ou

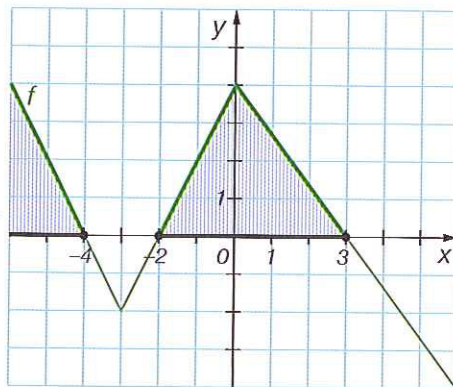
f est strictement positive
sur $\leftarrow ; -4] \cup [-2 ; 3]$



La fonction est strictement négative
sur les intervalles $]-4 ; -2]$ et $]3 ; \rightarrow$

ou

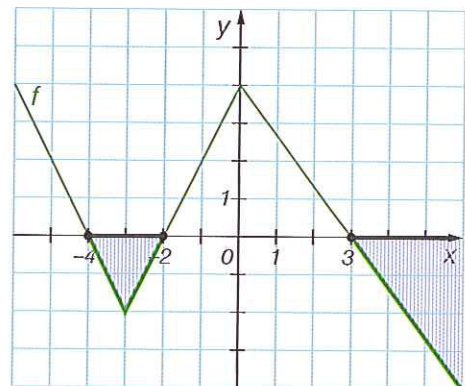
f est strictement négative
sur $]-4 ; -2] \cup]3 ; \rightarrow$



La fonction f est positive
sur les intervalles $\leftarrow ; -4]$ et $[-2 ; 3]$

ou

f est positive sur $\leftarrow ; -4] \cup [-2 ; 3]$



La fonction f est négative
sur les intervalles $[-4 ; -2]$ et $[3 ; \rightarrow$

ou

f est négative sur $[-4 ; -2] \cup [3 ; \rightarrow$

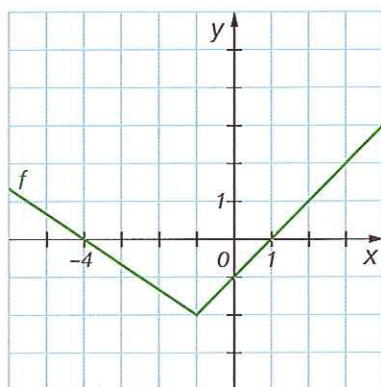
2. Tableau de signes

Sur la première ligne, on indique les éventuelles bornes du domaine et les zéros. On grise les intervalles qui n'appartiennent pas au domaine de la fonction.

Sur la seconde ligne, on indique :

- 0 sous les zéros;
- + sous les bornes du domaine dont l'image par f est positive;
- sous les bornes du domaine dont l'image par f est négative;
- sous les bornes du domaine qui ne possèdent pas d'image par f ;
- + sous les intervalles dont les images des réels par f sont positives;
- sous les intervalles dont les images des réels par f sont négatives;
- sous les intervalles dont les réels n'ont pas d'image par f .

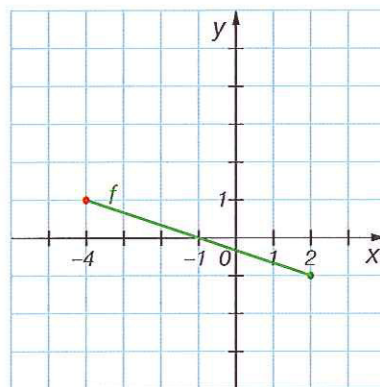
Exemples



$\text{dom } f = \mathbb{R}$

-4 et 1 sont les zéros de f .

x		-4		1	
y	$+$	0	$-$	0	$+$



$\text{dom } f = [-4 ; 2]$

-1 est le zéro de f .

x	■	-4		-1		2	■
y	■	■	$+$	0	$-$	$-$	■

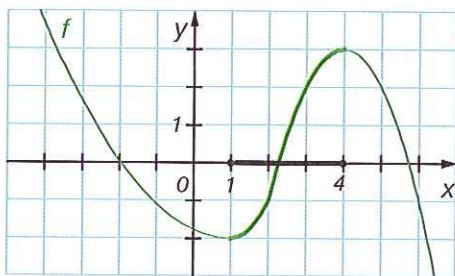
F Croissance et extremum d'une fonction

1. Définitions

a) Croissance et décroissance d'une fonction

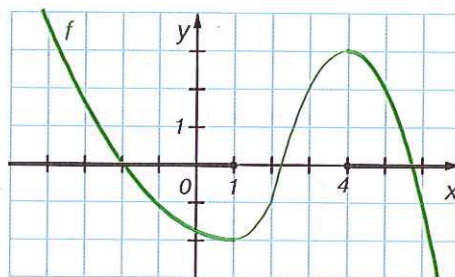
Une fonction f est **croissante** sur un intervalle si, lorsque x **augmente** dans cet intervalle, alors $f(x)$ **augmente**.

Exemple



f est croissante sur l'intervalle $[1 ; 4]$

Une fonction f est **décroissante** sur un intervalle si, lorsque x **augmente** dans cet intervalle, alors $f(x)$ **diminue**.



f est décroissante sur les intervalles $\leftarrow ; 1]$ et $[4 ; \rightarrow$

b) Extremums d'une fonction

Une fonction f admet, sur son domaine,

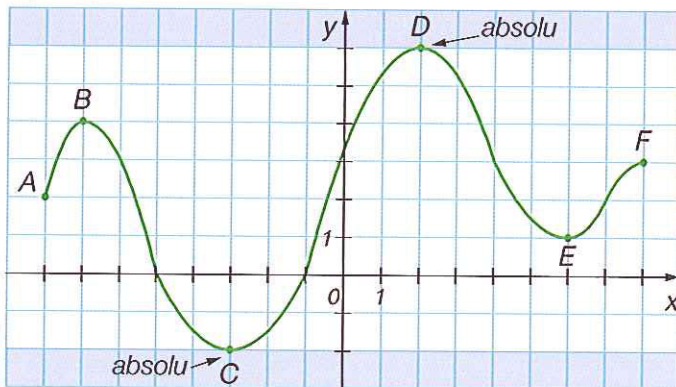
un **maximum local** (ou relatif) en un point si l'**ordonnée** de ce point est **supérieure** à celles des points du graphique de f situés dans son **voisinage**.

un **minimum local** (ou relatif) en un point si l'**ordonnée** de ce point est **inférieure** à celles des points du graphique de f situés dans son **voisinage**.

un **maximum absolu** en un point si l'**ordonnée** de ce point est **supérieure** à celles de **tous les points** du graphique de f .

un **minimum absolu** en un point si l'**ordonnée** de ce point est **inférieure** à celles de **tous les points** du graphique de f .

Exemple



Les points B, D et F sont des maximums locaux.

Le point D est le maximum absolu.

Les points A, C et E sont des minimums locaux.

Le point C est le minimum absolu.

Remarque : par convention, on dira maximum ou minimum pour désigner un maximum ou minimum local.

2. Tableau de variations

Sur la première ligne, on indique les éventuelles bornes du domaine et les abscisses des extremums.

Sur la seconde ligne, on indique :

sous les réels,

leur image si elle existe;



si elle n'existe pas.

sous les intervalles,



pour indiquer une croissance;



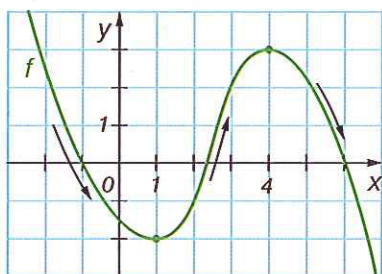
pour indiquer une décroissance;



si les réels de cet intervalle n'ont pas d'image.

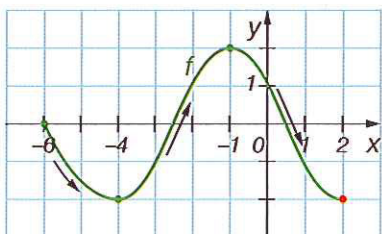
Sous la seconde ligne, on indique les maximums et minimums.

Exemples



$\text{dom } f = \mathbb{R}$

x		1		4	
y	\searrow	-2	\nearrow	3	\searrow
		min. local		Max. local	



$\text{dom } f = [-6; 2[$

x		-6		-4		-1		2	
y		0	\searrow	-2	\nearrow	2	\searrow		
		Max. local		min. absolu		Max. absolu			

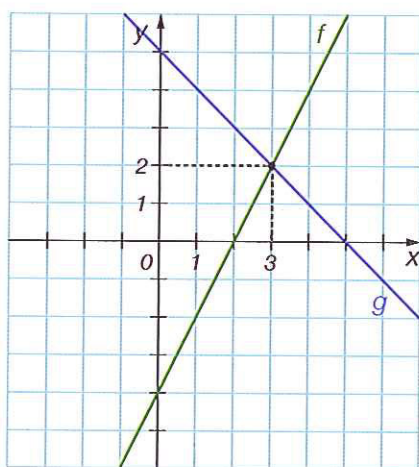
G Résolution graphique d'une équation et comparaison de fonctions

1. Résolution graphique d'une équation

a) Propriété : résolution de l'équation $f(x) = g(x)$

L'abscisse du point d'intersection des graphiques de $f(x)$ et de $g(x)$ est solution de l'équation $f(x) = g(x)$.

Exemple : $f(x) = 2x - 4$ et $g(x) = -x + 5$



Les graphiques des fonctions f et g se coupent au point $(3 ; 2)$.

3 est la solution de l'équation

$$2x - 4 = -x + 5.$$

En effet, $2 \cdot 3 - 4 = -3 + 5$

$$6 - 4 = -3 + 5$$

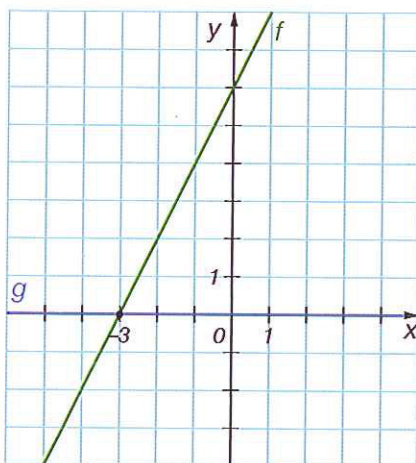
$$2 = 2$$

b) Cas particulier : résolution de l'équation $f(x) = 0$

L'abscisse du point d'intersection du graphique de $f(x)$ et de l'axe des abscisses est solution de l'équation $f(x) = 0$.

Donc, un zéro d'une fonction f est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple : $f(x) = 2x + 6$ et $g(x) = 0$



Les graphiques des fonctions f et g se coupent au point $(-3 ; 0)$.

-3 est la solution de l'équation

$$2x + 6 = 0.$$

En effet, $2 \cdot (-3) + 6 = 0$

$$-6 + 6 = 0$$

$$0 = 0$$

-3 est aussi le zéro de f .

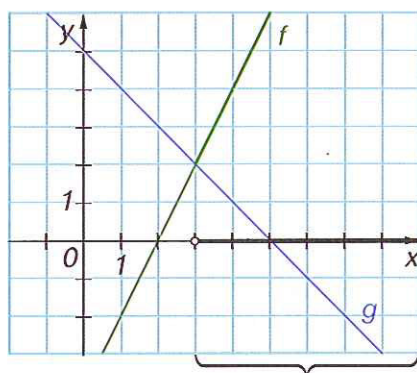
2. Comparaison de deux fonctions

Si f et g sont deux fonctions,

$f(x) > g(x)$ sur un intervalle si pour tout réel a de cet intervalle, $f(a) > g(a)$.

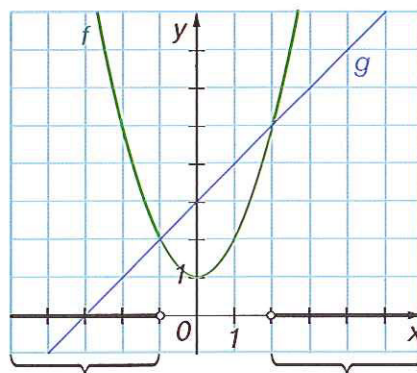
$f(x) \geq g(x)$ sur un intervalle si pour tout réel a de cet intervalle, $f(a) \geq g(a)$.

Exemples



$$f(x) > g(x)$$

$$]3; \rightarrow$$

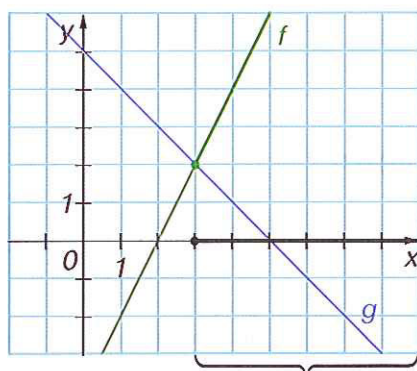


$$f(x) > g(x)$$

$$\leftarrow; -1[$$

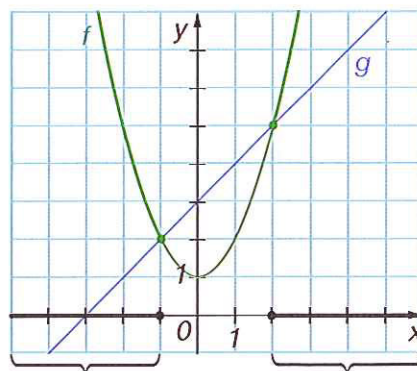
$$f(x) > g(x)$$

$$]2; \rightarrow$$



$$f(x) \geq g(x)$$

$$]3; \rightarrow$$



$$f(x) \geq g(x)$$

$$\leftarrow; -1]$$

$$f(x) \geq g(x)$$

$$[2; \rightarrow$$